

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям "Математика", "Математика и компьютерные науки",
"Механика и математическое моделирование"
2018 год

Вариант 2018-07-07-1

1. Найти точку M' , симметричную точке $M(-1, 2, 0)$ относительно прямой

$$a: \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$$

2. Разложить функцию $f(x)=\ln(3-4x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=-2$. Найти множество сходимости полученного ряда.

3. При каких действительных значениях параметра a уравнение

$$y'' - ay = \sin(3x)$$

имеет неограниченное решение?

4. Вычислить интеграл: $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\operatorname{arctg}^2(\sin(x)+3)}{\operatorname{arctg}^2(\cos(x)+3)}\right) dx.$

5. Для всех действительных значений параметра a найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2+3n^2}$

7. Разложить функцию $f(z) = \frac{3z^2+6z-8}{z^2-3z-4}$ в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем точку $z_0 = 2$, указать границы кольца сходимости.

8. В группе $G = U_{360}$ комплексных корней степени 360 из 1 найти:

а) все элементы g такие, что $g^{36} = 1$;

б) все элементы порядка 36,

и в обоих случаях подсчитать их количество.

(По определению, элемент g группы G имеет порядок n , если

$$g^n = 1, g^m \neq 1, m = 1, \dots, n-1.)$$