Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2024 год

Вариант 2024-07-23

1. Вычислите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(8+4x^2) - 3 - \frac{x^2}{2\ln 2}}{x^4}.$$
Ответ: $-\frac{1}{8\ln 2}$

Решение: Воспользуемся разложением в ряд Тейлора для логарифма, для чего сначала используем его свойства и формулу для смены основания:
$$\log_2(8+4x^2) = \log_2 8\left(1+\frac{x^2}{2}\right) = \log_2 8 + \log_2\left(1+\frac{x^2}{2}\right) = 3 + \frac{1}{\ln 2}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= 3 + \frac{x^2}{2\ln 2} - \frac{x^4}{8\ln 2} + o(x^4).$$
Значит,
$$\frac{\log_2(8+4x^2) - 3 - \frac{x^2}{2\ln 2}}{x^4} = \frac{3 - 3 + \frac{x^2}{2\ln 2} - \frac{x^2}{2\ln 2} - \frac{x^4}{8\ln 2} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{8\ln 2} + o(1).$$
Отсюда получается ответ.

2. Найдите объём тела, полученного вращением графика функции $y = \cos x - 1$ (при $x \in [0, 2\pi]$) относительно оси $0x$.

Ответ: $3\pi^2$

Решение: Площадь круглого поперечного сечения в точке x равна $\pi(\cos x - 1)^2$. Остаётся проинтегрировать эту функцию от $x = 0$ до $x = 2\pi$:
$$\int_0^{2\pi} \pi(\cos x - 1)^2\,dx = \pi\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x - 2\cos x + 1\right)\,dx =$$
$$= \pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} - 2\cos x + 1\right)\,dx = \pi\left(\frac{\sin 2x}{4} - 2\sin x + \frac{3}{2}x\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi^2.$$

3. Найдите производную функции $y = \log_{\sin x}\operatorname{tg} x$.

Ответ:
$$y' = \frac{\operatorname{tg} x \ln\sin x + \operatorname{ctg} x\ln\cos x}{\ln^2\sin x}$$
Решение:
$$y' = (\log_{\sin x}\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\ln(\sin x)}\right)' = \left(\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\ln(\sin x)}\right)' = \left(1 - \frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}\right)' =$$

$$= -\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}\ln\sin x - \frac{\cos x}{\sin x}\ln\cos x}{\ln^2\sin x} = \frac{\operatorname{tg} x\ln\sin x + \operatorname{ctg} x\ln\cos x}{\ln^2\sin x}$$

4. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = y(1-y)(1+y).$$

Ответ:

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{1 + C\cdot e^2x}}, \qquad y = \pm 1.$$

Решение: Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y(1-y)(1+y)} = dx.$$

Чтобы взять интеграл слева — разложим дробь на простейшие.

$$\frac{1}{y(1-y)(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} + \frac{C}{1+y} = \frac{A(1-y)(1+y) + By(1+y) + Cy(1-y)}{y(1-y)(1+y)} =$$

$$= \frac{A + (B+C)y + (-A+B-C)y^2}{y(1-y)(1+y)}.$$

То есть, $A = 1, B + C = 0, -A + B - C = 0$, откуда $B = 0.5, C = -0.5, A = 1$.

Берём интегралы от элементарных дробей, получаем решение (к нему добавляем решения $y = 0, y = 1, y = -1$, потерянные при делении):

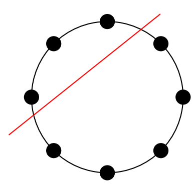
$$\ln|y| - 0.5\ln|1-y| - 0.5\ln|1+y| = x + C.$$

Выражаем y через x :

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = C\cdot e^x, \qquad y = \pm 1.$$

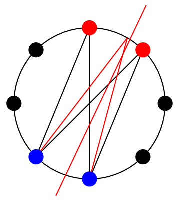
$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{1 + C\cdot e^2x}}, \qquad y = \pm 1.$$

5. На плоскости есть окружность. На окружности расположено 8 точек-«бусин», образующих вершины правильного восьмиугольника. Случайным образом проводится разрез — выбирается случайная точка на окружности (НЕ обязательно бусина), потом выбирается случайное направление, и проводится прямая. Такая прямая разрежет окружность на две дуги. С какой вероятностью на получившихся дугах бусин будет поровну?



Ответ: $\frac{1}{8}$

Решение: Случайно выбранная точка в любом случае окажется между какими-нибудь двумя бусинами — обозначим их красным. Чтобы разрез разделил бусины поровну, нужно, чтобы прямая (выходящая из случайной точки на дуге с красными концами) прошла между бусинами, которые мы обозначили синим.



Вероятность определится величиной угла, который опирается на синюю хорду. Вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, одинаковы по величине, поэтому от точного расположения начала разреза на красной хорде вероятность зависеть не будет. Осталось найти величину угла, опирающегося на синюю хорду.

Проведём из красной точки прямые ко всем остальным. Получится 6 одинаковых углов (так как опираются они на 6 отрезков одинаковой длины), и в сумме они составляют угол правильного восьмиугольника, равный 135°. Тогда на синюю хорду опирается угол в $\frac{135^\circ}{6} = 22.5^\circ$, то есть вероятность, что прямая разреза окажется внутри этого угла, составит $\frac{\pi}{8\pi} = \frac{1}{8}$.

6. Решите линейную систему в комплексных числах ($x, y, z \in \mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} 2+i & i & 2+i \\ 2 & 1 & 2+2i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4i \\ 6+6i \\ -3+i \end{pmatrix}$$

Ответ: $x = 3 - i$; $y = 4i$; $z = 1 + i$.

Решение: Комплексность — не преграда методу Гаусса. Приводя систему к диагональному виду, мы получим ответ $x = 3 - i$; $y = 4i$; $z = 1 + i$.

7. В пространстве задан плоский четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A = (0,0,0), B = (2,3,1), C = (-2,5,-5), D = (-2,1,-3)$. Копию этого четырёхугольника параллельно сдвигают на вектор $v = (1,1,7)$ и обозначают $A_1B_1C_1D_1$. Найдите объём получившейся призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ответ: 75

Решение: Эта фигура не параллелопипед, но если мы разобъём призму на две призмы с треугольными основаниями — мы сможем воспользоваться формулами для определителя (если вектора a, b задают две стороны треугольного основания, а c — боковое ребро, то объём такой призмы можно найти, поделив смешанное произведение векторов (определитель) пополам, т.к. определитель даёт площадь параллелопипеда, а у треугольной призмы основание вдвое меньше.) Итак, ищем объёмы призм $ABCA_1B_1C_1$ и $ACDA_1C_1D_1$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 100, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 50, \qquad V = \frac{100+50}{2} = 75.$$

8. Есть 30 карточек с числами от 1 до 30. Наугад выбираются три. С какой вероятностью из них можно будет сложить верное выражение вида $\square + \square = \square$, где квадрат обозначает место под карточку? Карточки можно ставить в любом порядке.

   Ответ:
$$\frac{3}{58}$$

   Решение: Всего способов выбрать три карточки будет $(30 \cdot 29 \cdot 28)/6$. Нужно найти, сколько карточек позволят составить пример со сложением.

   Пусть наугад попались числа $a < b < c$. В таком случае $c = a+b$, то есть c однозначно определяется упорядоченной парой a, b. Ограничивает нас только то, что $a + b \leqslant 30$. Значит, нужно найти число пар (a, b) таких, что $a < b$, $a \in [1, 30], b \in [1, 30], a+b \leqslant 30$.

   Представим квадрат 30 клеток на 30 клеток. В нём будет 900 клеточек, каждая из которых обозначает неупорядоченную пару. Одна диагональ квадрата (30 клеток) будет соответствовать случаю, когда $a = b$ — такие примеры надо исключить, и рассматривать только один из «треугольников», где $a < b$. Другая же диагональ квадрата будет соответствовать случаю, когда $a + b = 31$ — нам нужны случаи, которые лежат по нужную сторону от этой диагонали. Так как сторона квадрата составляет чётное число клеток, эти клетчатые диагонали «не пересекутся» — общих клеток они иметь не будут. Всего нам подойдёт «одна четверть» квадрата, а точнее:
$$\frac{900 - 30 - 30}{4} = 210.$$

   Вероятность будет равна отношению числа подходящих наборов ко всем возможным:
$$\frac{210 \cdot 6}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{3}{58}.$$

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование»
2024 год

Вариант 2024-06-26

1. Вычислите предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x-x^2}{x^2}.$$
Ответ: $-\frac{1}{2}$
Решение: Можно разложить e^{-x} в ряд Тейлора:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x-x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1+x-x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)=-\frac{1}{2}.$$

2. Вычислите интеграл $\int x\sin^3 x^2\cos^2 x^2\,dx$.
Ответ: $\frac{1}{10}\cos^5 x^2-\frac{1}{6}\cos^3 x^2+C$
Решение: Вносим x под dx, делаем замену $t=x^2$:
$$\frac{1}{2}\int\sin^3 t\cos^2 t\,dt.$$
Теперь превращаем $-\sin t dt$ в $d\cos t$:
$$-\frac{1}{2}\int\sin^2 t\cos^2 t\,d\cos t=-\frac{1}{2}\int(1-\cos^2 t)\cos^2 t\,d\cos t$$
Последний интеграл элементарный. Берём его, заменяем t на x^2, получаем ответ
$$\frac{1}{10}\cos^5 x^2-\frac{1}{6}\cos^3 x^2+C$$

3. Решите дифференциальное уравнение
$$xy'=\frac{y}{x+1}+x.$$
Ответ:
$$y=C\cdot\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{x+1}+\frac{x\ln|x|}{x+1}.$$
Решение: Уравнение линейное. Сначала решаем однородное
$$xy'=\frac{y}{x+1}\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x(x+1)}\Leftrightarrow y=C\cdot\frac{x}{x+1}.$$
Далее пользуемся методом вариации постоянной. Подставляем $y=C(x)\cdot\frac{x}{x+1}$ в неод-

нородное уравнение $xy' = \frac{y}{x+1} + x$. Получится

$$x \cdot C' \cdot \frac{x}{x+1} = x \Leftrightarrow C' = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow C(x) = x + \ln|x| + C.$$

Получаем ответ

$$y = C \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x+1} + \frac{x\ln|x|}{x+1}.$$

4. Вычислите производную функции

$$f(x) = (\sin(\sin x))^{\sin x}.$$

Ответ:

$$f'(x) = (\sin(\sin x))^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \Big(\ln(\sin(\sin x)) + \sin x \cdot \operatorname{ctg}(\sin x)\Big)$$

Решение:

$$(\sin(\sin x))^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(\sin(\sin x))}$$

Теперь дифференцируем выражение как сложную функцию.

5. N точек расположены в вершинах выпуклого N-угольника. Все точки в случайном порядке соединены ломаной из $(N-1)$-го звена. С какой вероятностью у ломаной не будет самопересечений?

Ответ:

$$\frac{2^{N-2}}{(N-1)!}$$

Решение: Посчитаем общее количество ломаных (с учётом направления обхода): начать мы можем в любой из N точек, потом линия идёт в любую из $(N-1)$ оставшихся, затем — в любую из $(N-2)$ оставшихся, и так далее. Всего $N!$ вариантов.

Теперь посчитаем количество ломаных без самопересечений (опять с учётом направления обхода): начать мы можем в любой из N точек. Затем, на каждом последующем шагу, из оставшихся незанятых точек мы сможем выбрать только две «крайние». В ином случае отрезок ломаной разделит множество незанятых точек на две части, и какому-то будущему звену ломаной придётся перейти из одной части в другую, и оно пересечёт только что проведённый отрезок. На последнем шагу выбора не останется, будет всего одна свободная точка. Поэтому вариантов ломаной без самопересечений будет $N \cdot 2^{N-2} \cdot 1$.

Ответ, соответственно, будет такой:

$$\frac{2^{N-2}}{(N-1)!}$$

По условию направление обхода не важно, поэтому оба количества надо поделить вдвое, но такая поправка в дроби всё равно сократится.

6. Найдите пересечение решений систем

$$\begin{cases} x + 2y + 3w = -1, \\ 3x + 13y + 7z + 9w = -17 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2y + 2z + w = -3 \\ 2x + 6y + 2z + 6w = -6. \end{cases}$$

Ответ: Множество $x = 2\lambda, y = -2 - \lambda, z = \lambda, w = 1$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решение: Пересечение решений систем — это то, что подходит сразу под обе системы, поэтому мы можем просто объединить системы в одну. Остаётся решить

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 13 & 7 & 9 & -17 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & -6 \end{array}\right),$$

что делается методом Гаусса.

7. Через точку $(0,0,0)$ проходят три прямые: $x/2 = y/2 = z/1$, $x/-6 = y/-2 = z/3$, $x/4 = y/7 = z/-7$. На одной из прямых откладываем от нуля расстояние 5, на другой — расстояние 7, и на оставшейся — расстояние 8. Отмеченные на прямых точки, вместе с точкой $(0,0,0)$, образуют тетраэдр.

   Какие могут получиться объёмы у такого тетраэдра?

   Ответ: Только $\frac{240}{\sqrt{114}}$

   Решение: Представим, что из точки $(0,0,0)$ выходят вектора $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$, образующие рёбра тетраэдра. Подсчёт определителя

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

даст объём параллелопипеда, построенного на векторах u, v, w. Объём тетраэдра будет меньше в 6 раз — так как основание тетраэдра это половина основания параллелограмма, и ещё в формуле объёма пирамиды есть множитель $\frac{1}{3}$, которого в формуле объёма параллелограмма нет ($V = \frac{1}{3}Sh$ против $V = Sh$.)

По свойствам определителя, из него можно выносить наружу скалярные множители строк. Поэтому неважно, на какой прямой откладывалось какое расстояние, и в какие стороны они смотрели — с точностью до знака определитель от этого не зависит. Нужно считать определитель, построенный на нормированных направляющих векторах прямых, и домножить его на $\frac{1}{6}$ и на отложенные расстояния. То есть в ответ пойдёт такое число (нормировка направляющих векторов тоже вынесена наружу):

$$v = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^2+7^2+7^2}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & -7 \end{vmatrix}$$

Упрощаем:

$$\frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{114}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & -7 \end{vmatrix} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{114}} \cdot (-108) = -\frac{240}{\sqrt{114}}.$$

Ищётся объём, поэтому минус надо убрать. Ответ: $\frac{240}{\sqrt{114}}$

8. Даны три уравнения на комплексной плоскости:

$$\begin{cases} |z| = 1, \\ \left|z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1, \\ \left|z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1. \end{cases}$$

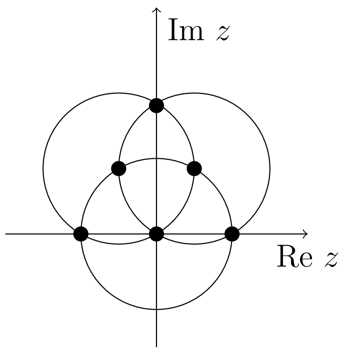
Пусть z_l — корни, подходящие под два уравнения из трёх, $l = 1, 2, \ldots, n$. Чему равно n? Сколько чисел вида $z = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}$ находятся в области

$$\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\ z| \leqslant 2, |\mathrm{Im}\ z| \leqslant 4\}$$

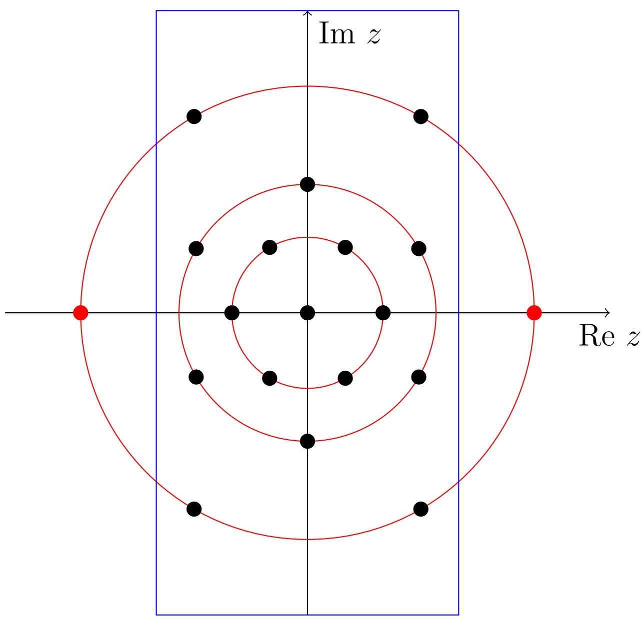
где k_l — целые неотрицательные степени? В ответе укажите оба количества.

Ответ: $n = 6$, в области будет 17 чисел.

Решение: Найдём z_i графически. Если нарисовать уравнения на комплексной плоскости, то мы увидим три окружности радиуса 1, с центрами в 0, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, которые образуют равносторонний треугольник. Сразу три окружности не пересекаются нигде, а вот пересечения двух окружностей будут следующие: $0, 1, -1$, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $i\sqrt{3}$. Они составляют набор z_i, и в нём 6 чисел.



Теперь давайте изобразим точки вида $z = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}$. Область, в которой мы их ищем, выглядит как прямоугольник.



Составляющие z_i можно сгруппировать по их модулям: если число 0 с модулем 0, есть числа $0, 1, -1$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, с модулями 1 и есть число $i\sqrt{3}$ с модулем $\sqrt{3}$.

Отметим точку 0 и дальше будем считать, что степень при 0 ненулевая.

Если степень при $i\sqrt{3}$ равна нулю, произведения оставшихся корней образуют правильный шестиугольник с вершиной в 1 на единичной окружности.

Если степень при $i\sqrt{3}$ равна одному, получится шестиугольник на окружности радиуса $\sqrt{3}$, причём повёрнутый на 90 градусов относительно первого.

Если степень при $i\sqrt{3}$ равна двум, будет шестиугольник на окружности радиуса 3, повёрнутый как исходный. В прямоугольник попадут не все корни.

Бóльшие степени при $i\sqrt{3}$ дадут слишком большие окружности, которые заведомо лежат вне прямоугольной области. Всего же в область попадёт 17 чисел.