

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру
МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика»,
«Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое
моделирование»
2024 год

Вариант 2024-07-23

1. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(8 + 4x^2) - 3 - \frac{x^2}{2 \ln 2}}{x^4}.$$

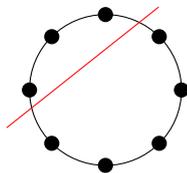
2. Найдите объём тела, полученного вращением графика функции $y = \cos x - 1$ (при $x \in [0, 2\pi]$) относительно оси Ox .

3. Найдите производную функции $y = \log_{\sin x} \operatorname{tg} x$.

4. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = y(1 - y)(1 + y).$$

5. На плоскости есть окружность. На окружности расположено 8 точек-«бусин», образующих вершины правильного восьмиугольника. Случайным образом проводится разрез — выбирается случайная точка на окружности (НЕ обязательно бусина), потом выбирается случайное направление, и проводится прямая. Такая прямая разрежет окружность на две дуги. С какой вероятностью на получившихся дугах бусин будет поровну?



6. Решите линейную систему в комплексных числах ($x, y, z \in \mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix} 2+i & i & 2+i \\ 2 & 1 & 2+2i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4i \\ 6+6i \\ -3+i \end{pmatrix}$$

7. В пространстве задан плоский четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 3, 1)$, $C = (-2, 5, -5)$, $D = (-2, 1, -3)$. Копию этого четырёхугольника параллельно сдвигают на вектор $v = (1, 1, 7)$ и обозначают $A_1B_1C_1D_1$. Найдите объём получившейся призмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$.

8. Есть 30 карточек с числами от 1 до 30. Наугад выбираются три. С какой вероятностью из них можно будет сложить верное выражение вида $\square + \square = \square$, где квадрат обозначает место под карточку? Карточки можно ставить в любом порядке.

Вступительный экзамен по математике для поступающих в магистратуру
МГУ имени М. В. Ломоносова по направлениям «Математика»,
«Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое
моделирование»
2024 год

Вариант 2024-06-26

1. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x - x^2}{x^2}.$$

2. Вычислите интеграл $\int x \sin^3 x^2 \cos^2 x^2 dx$.

3. Решите дифференциальное уравнение

$$xy' = \frac{y}{x+1} + x.$$

4. Вычислите производную функции

$$f(x) = (\sin(\sin x))^{\sin x}.$$

5. N точек расположены в вершинах выпуклого N -угольника. Все точки в случайном порядке соединены ломаной из $(N - 1)$ -го звена. С какой вероятностью у ломаной не будет самопересечений?

6. Найдите пересечение решений систем

$$\begin{cases} x + 2y + 3w = -1, \\ 3x + 13y + 7z + 9w = -17 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2y + 2z + w = -3 \\ 2x + 6y + 2z + 6w = -6. \end{cases}$$

7. Через точку $(0, 0, 0)$ проходят три прямые: $x/2 = y/2 = z/1$, $x/-6 = y/-2 = z/3$, $x/4 = y/7 = z/-7$. На одной из прямых откладываем от нуля расстояние 5, на другой — расстояние 7, и на оставшейся — расстояние 8. Отмеченные на прямых точки, вместе с точкой $(0, 0, 0)$, образуют тетраэдр.

Какие могут получиться объёмы у такого тетраэдра?

8. Даны три уравнения на комплексной плоскости:

$$\begin{cases} |z| = 1, \\ \left| z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1, \\ \left| z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1. \end{cases}$$

Пусть z_l — корни, подходящие под два уравнения из трёх, $l = 1, 2, \dots, n$.

Чему равно n ? Сколько чисел вида $z = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$ находятся в области

$$\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 2, |\operatorname{Im} z| \leq 4\}$$

где k_l — целые неотрицательные степени? В ответе укажите оба количества.