Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 241

ОТВЕТЫ

1. 2

2. $n = 11, 23$

3. $x \in (-3, -2) \cup \left[\frac{3}{13}, 3\right] \cup \left[4, +\infty\right)$

4. $x = \frac{k_1\pi}{2},\ \frac{\pi}{12} + k_2\pi,\ \frac{5\pi}{12} + k_3\pi, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

5. 30°

6. 8

7. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}} \quad \left(= \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее числа $\dfrac{2+\cos\frac{\pi}{5}}{3} + \dfrac{3+\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$.

Решение: $\dfrac{2+\cos\frac{\pi}{5}}{3} + \dfrac{3+\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \dfrac{13+2\cos\frac{\pi}{5}-3\cos\frac{\pi}{5}}{6} = 2 + \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{6} \in (2,3)$.

Ответ: 2

2. Натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ образуют строго возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите все возможные значения n, если известно, что n нечётно, $n > 1$ и сумма $a_1 + \ldots + a_n$ равна 2024.

Решение: Поскольку n нечётно, указанная сумма равна $n \cdot a_{\frac{n+1}{2}}$. Далее, $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$. Стало быть, $n \in \{11, 23, 253\}$. Если $n = 253$, то $a_{\frac{n+1}{2}} = 8$ и получаем противоречие с возрастанием и натуральностью элементов прогрессии. Если же $n = 11$ или $n = 23$, то $a_{\frac{n+1}{2}} = 184$ и $a_{\frac{n+1}{2}} = 88$ соответственно, что позволяет построить примеры последовательностей $179, 180, \ldots, 184, \ldots, 188, 189$ и $77, 78, \ldots, 88, \ldots, 98, 99$.

Ответ: $n = 11, 23$

3. Решите неравенство $\log_{x+3}(x^2-7x+12) \leqslant 2$.

Решение:

$$\log_{x+3}(x^2-7x+12) \leqslant 2 \iff \begin{cases} x^2-7x+12 \geqslant 0 \\ x > -3 \\ \dfrac{(x^2-7x+12)-(x+3)^2}{(x+3)-1} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3 \\ x \geqslant 4 \end{array}\right. \\ x > -3 \\ \dfrac{13x-3}{x+2} \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in (-3,-2) \cup \left[\frac{3}{13}, 3\right] \cup \left[4, +\infty\right)$

4. Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} 2x.$$

Решение:

$$\frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} 2x \iff \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} \iff$$

$$\iff \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x}\left(\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} - 1\right) = 0 \iff \frac{(\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} 3x - 1)(\operatorname{tg} x + 1)}{(1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x)} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(-x) \\ \operatorname{tg} 3x = 1 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \\ \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x \neq \pm 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \cos 4x \cos 2x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{k_1\pi}{2},\ \frac{\pi}{12} + k_2\pi,\ \frac{5\pi}{12} + k_3\pi, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Известно, что $AD = 2 + \sqrt{3}$, $CD = \sqrt{3}$. Найдите угол $\angle CAB$, если известно также, что он в два раза меньше угла $\angle ACB$.

Решение: Положим $\angle CAB = \alpha$.

Пусть O — центр вписанной окружности и E — точка пересечения биссектрисы CO со стороной AB. Пусть также F — основание высоты треугольника AEC, опущенной из вершины E. По условию $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle CAB = \alpha$. Стало быть, треугольник AEC равнобедренный и $AF = CF$. Тогда $DF = CF - CD = \frac{1}{2}AC - CD = \frac{1}{2}(AD + CD) - CD = \frac{1}{2}(AD - CD) = 1$.

Рассмотрим треугольник OEH, где H — точка касания окружности и стороны AB. Из подобия прямоугольных треугольников CEF и COD следует, что

$$OE = \frac{DF}{\cos \angle OCD} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Далее,

$$OH = OD = CD \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Наконец, $\angle OEH = \angle CEB = 180^\circ - \angle EBC - \angle BCE = 180^\circ - \angle ABC - \alpha = 2\alpha$, откуда

$$\sin 2\alpha = \sin \angle OEH = \frac{OH}{OE} = \sqrt{3}\sin\alpha.$$

Стало быть, $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$, то есть $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: 30°

6. Числа a, b, c положительны и удовлетворяют соотношению $a+b+c=1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c}.$$

Решение: Заметим, что равенство $a+b+c=1$ равносильно равенству $1+a=(1-b)+(1-c)$. Отсюда в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим получаем $1+a \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. Аналогично, $1+b \geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-c)}$ и $1+c \geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$. Стало быть,

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Равенство же достигается при $a=b=c=1/3$.

Ответ: 8

7. Плоскость π перпендикулярна ребру SA правильной треугольной пирамиды $ABCS$ с вершиной S и основанием ABC, делит это ребро в отношении $1:2$ (считая от вершины S) и проходит через середину ребра SB. Найдите угол между плоскостью π и плоскостью основания пирамиды.

Решение: Искомый угол равен углу между SA и нормалью к плоскости ABC, то есть углу $\angle ASH$, где H — основание высоты пирамиды. Далее, поскольку $\pi \perp SA$ и $BC \perp SA$, имеем $\pi \parallel BC$. Стало быть, π пересекает треугольник BCS по средней линии, параллельной BC. Пусть K — точка пересечения π и SA, L — точка пересечения π с продолжением AH, M — точка пересечения AL и BC, N — точка пересечения LK и SM. Тогда $AK = 2KS$, $SN = NM$, откуда видим, что $LM = MA$ и $LH = 2HA$. При этом $\angle AKL = 90^\circ$. Из подобия треугольников ALK и ASH получаем:

$$\frac{AH}{\sqrt{AH^2+SH^2}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{AH^2+SH^2}}{3AH},$$

откуда

$$\frac{AH}{SH} = \sqrt{\frac{2}{7}},$$

то есть тангенс искомого угла равен $\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}} \quad \left(=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 242

ОТВЕТЫ

1. 3

2. 9

3. $x \geqslant 3$

4. $x = 2n\pi,\ \pi/2 + 2n\pi.$

5. 1

6. 1

7. $39 : 36$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$.

Решение: $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 3.$

Ответ: 3

2. Найдите сумму всех натуральных чисел n, для которых число n^2+7n+1 является квадратом некоторого натурального числа.

Решение: Заметим, что при любом натуральном n справедливо $n^2+7n+1 < n^2+8n+16 = (n+4)^2$. Стало быть, достаточно исследовать равенство n^2+7n+1 числам $(n+1)^2$, $(n+2)^2$ и $(n+3)^2$. Первое равенство равносильно $5n = 0$, второе равносильно $3n = 3$, третье равносильно $n = 8$. Получаем, что $n = 1$ и $n = 8$ — единственные два числа, удовлетворяющие условию. Их сумма же равна 9.

Ответ: 9

3. Решите неравенство $8^{\log_{x^2-1}(x-1)}+8^{\log_{x^2-1}(x+1)}\leqslant 6$.

Решение: Положим $t=\log_{x^2-1}(x+1)$. Тогда при $x>1$, $x\neq\sqrt{2}$ справедливо $\log_{x^2-1}(x-1)=1-t$. Получаем $8^t+8\cdot 8^{-t}\leqslant 6$, откуда $(8^t-2)(8^t-4)\leqslant 0$, т.е. $1\leqslant 3t\leqslant 2$. Стало быть, при $x>1$, $x\neq\sqrt{2}$

$$8^{\log_{x^2-1}(x-1)}+8^{\log_{x^2-1}(x+1)}\leqslant 6 \iff 1\leqslant 3\log_{x^2-1}(x+1)\leqslant 2 \iff$$
$$\iff \frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{1+\log_{x+1}(x-1)}\leqslant\frac{2}{3} \iff \frac{1}{2}\leqslant\log_{x+1}(x-1)\leqslant 2 \iff$$
$$\iff \sqrt{x+1}\leqslant x-1\leqslant (x+1)^2 \iff \begin{cases} x\geqslant 1\\ x^2-3x\geqslant 0\\ x^2+x+2\geqslant 0\end{cases} \iff x\geqslant 3.$$

Ответ: $x\geqslant 3$

4. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x+\cos x=1$.

Решение: Перенесём всё в одну часть и преобразуем:

$$\sin x+\sin 2x+\cos x-1=\sqrt{2}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)+\sin 2x-1=$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)-\cos 2\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)-1=2\sin^2\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)-2$$

Получаем: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$. Первое не подходит, стало быть, $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=2n\pi,\ \pi/2+2n\pi$.

5. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. На дуге CA (не содержащей точку B) этой окружности отмечена некоторая точка P. Прямая, проходящая через точки B и H, где H — точка пересечения высот треугольника ABC, пересекает отрезок AP в точке Q. Найдите отношение AC к BC, если известно, что точки C, P, Q, H лежат на одной окружности.

Решение: Проведём касательную ℓ к окружности в точке C. Отметим на ней точку D, чтобы угол $\angle ACD$ был острым. Тогда, поскольку дуга CA меньше $180°$, справедливо равенство

$$\angle HCD=\angle HCP+\angle PCD.$$

Обозначим через E точку пересечения прямых BQ и AC. Эта точка — основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B. Рассмотрим прямоугольный треугольник AQE. Поскольку точки C, P, Q, H лежат на одной окружности, $\angle AQE=180°-\angle HQP=\angle HCP$. Далее, поскольку ℓ касается окружности в точке C, а угол CAP опирается на дугу CP, имеем $\angle PCD=\angle CAP=\angle EAQ$. Учитывая, что $\angle AQE+\angle EAQ=90°$, получаем

$$\angle HCD=\angle HCP+\angle PCD=\angle AQE+\angle EAQ=90°.$$

Таким образом, прямая ℓ перпендикулярна CH и, стало быть, параллельна AB. Но тогда $AC=BC$, то есть искомое отношение равно 1.

Ответ: 1

6. Число x_0 является общим корнем многочленов x^3+ax^2+bx+c, x^3+bx^2+cx+a, x^3+cx^2+ax+b. Найдите все возможные значения x_0, если известно, что $a>b>c$.

Решение: Если число является общим корнем двух многочленов, то оно является корнем и их разности. Стало быть, x_0 является корнем многочленов $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)$ и $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)$. Поделим эти два многочлена на старшие коэффициенты (из условия следует, что они не равны нулю). Тогда x_0 является корнем разности полученных двух многочленов. Она имеет вид $\left(\frac{b-c}{a-b}-\frac{c-a}{b-c}\right)x+\left(\frac{c-a}{a-b}-\frac{a-b}{b-c}\right)$. Отсюда, учитывая, что первая скобка — число положительное, получаем

$$x_0=\frac{\frac{a-b}{b-c}-\frac{c-a}{a-b}}{\frac{b-c}{a-b}-\frac{c-a}{b-c}}=\frac{(a-b)^2+(a-c)(b-c)}{(b-c)^2+(a-b)(a-c)}=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}=1.$$

Ответ: 1

7. В основании пирамиды лежит трапеция $ABCD$, $AD\|BC$, $AD=2BC$. Сфера радиуса 1 касается плоскости основания пирамиды и плоскостей её боковых граней ADS и BCS. Найдите отношение, в котором делит объём пирамиды плоскость ADT, где T — точка касания сферы с плоскостью BCS, если грань ADS перпендикулярна плоскости основания, а высота пирамиды равна 4.

Решение: Проведём через точку T плоскость, перпендикулярную AD и спроецируем ортогонально на неё вершины пирамиды. Тогда точки A, D спроецируются в точку A', точки B, C — в точку B', а точка S — в точку S'. При этом треугольник $A'B'S'$ будет прямоугольным с прямым углом A', а сфера при такой проекции перейдёт в окружность, вписанную в этот треугольник, причём T будет точкой касания гипотенузы. Поскольку радиус сферы равен 1, по теореме о касательной имеем $A'B'=1+B'T$, $A'S'=1+S'T$. Применяя теорему Пифагора и сокращая квадраты, получаем

$$1+B'T+S'T=B'T\cdot S'T.$$

Но $A'S'$ равно высоте пирамиды, то есть $S'T=A'S'-1=3$. Тогда $B'T=2$ и, стало быть, плоскость ADT делит оба ребра SB и SC в отношении $S'T:TB'=3:2$, считая от S. Обозначим середину AD через E и разобьём пирамиду на тетраэдры $SABE$, $SBCE$ и $SCDE$. Объёмы этих тетраэдров равны, так как площади их оснований равны и они имеют общую с исходной пирамидой высоту. Стало быть, если объём исходной пирамиды равен V, то часть пирамиды, отсекаемая плоскостью ADT и содержащая вершину S, имеет объём

$$\frac{V}{3}\cdot\left(2\cdot\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)=\frac{39V}{75}.$$

Значит, плоскость ADT делит объём пирамиды в отношении $39:36$.

Ответ: $39:36$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 243

ОТВЕТЫ

1. 1

2. 2450

3. $x \in [0; 4) \cup (4; 6]$

4. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. 30°

6. $x = y = z = 1/3$

7. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\log_{1/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\right) + \log_{1/2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Решение: $\log_{1/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\right) + \log_{1/2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right) = \log_{1/2}\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \log_{1/2}(1/2) = 1.$

Ответ: 1

2. Найдите сумму всех двузначных чисел, состоящих из одной чётной цифры и одной нечётной цифры (чётные цифры — это $0, 2, 4, 6, 8$, нечётные — все остальные).

Решение: Если первая цифра a равна $1, 3, 5, 7, 9$, мы должны учесть числа $a0, a2, a4, a6, a8$. Если первая цифра a равна $2, 4, 6, 8$, мы должны учесть числа $a1, a3, a5, a7, a9$. Если из каждого такого числа вычесть 1, получим числа $a0, a2, a4, a6, a8$. Таким образом, если из искомой суммы вычесть 20, мы получим сумму всех чётных чисел от 10 до 98. Эта сумма равна $45 \cdot \frac{10+98}{2} = 45 \cdot 54 = 90 \cdot 27 = 2430$. Стало быть, искомая сумма равна $2430 + 20 = 2450$.

Ответ: 2450

3. Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2}-16^{4x-8}}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{12+4x-x^2}}>0.$$

Решение: Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-2(4x-8)>0 \\ x^2+4x\geqslant 0 \\ x^2-4x-12\leqslant 0 \\ |x^2+4x|+|x^2-4x-12|\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-4)^2>0 \\ x(x+4)\geqslant 0 \\ (x-6)(x+2)\leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 6 \\ x\neq 4 \end{cases}$$

Ответ: $x\in[0;4)\cup(4;6]$

4. Решите уравнение $2\sin^3 x=\cos 3x$.

Решение: Воспользуемся формулой косинуса тройного угла и заметим, что $\cos x=0$ не дает решение. Тогда

$$2\sin^3 x=\cos 3x \iff 2\sin^3 x=4\cos^3 x-3\cos x \iff 2\operatorname{tg}^3 x=4-3(1+\operatorname{tg}^2 x) \iff$$
$$\iff 2\operatorname{tg}^3 x+3\operatorname{tg}^2 x-1=0 \iff (\operatorname{tg} x+1)^2(2\operatorname{tg} x-1)=0 \iff$$
$$\iff \operatorname{tg} x=-1,\frac{1}{2} \iff x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

5. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, отличная от B и C. Пусть E — точка пересечения отрезка AC с окружностью, описанной около треугольника ABD, отличная от A. Пусть F — точка пересечения отрезка AB с окружностью, описанной около треугольника ACD, отличная от A. Пусть D', E', F' — точки пересечения окружности, описанной около треугольника ABC, с прямыми AD, BE, CF соответственно, отличные от точек A, B, C. Найдите угол $\angle E'D'F'$, если известно, что $\angle EDF=30°$.

Решение: Покажем, что $ED\parallel E'D'$. Поскольку точки A и D лежат по разные стороны от прямой BE, точки D и D' лежат по одну сторону от прямой BE. Учитывая равенство углов, опирающихся на равные дуги, получаем, что

$$\angle BED=\angle BAD=\angle BAD'=\angle BE'D'.$$

Стало быть, действительно, $ED\parallel E'D'$. Аналогично, $FD\parallel F'D'$. Отсюда следует, что $\angle E'D'F'=\angle EDF=30°$.

Ответ: $30°$

6. Найдите все тройки положительных чисел x, y, z, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases}(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)=xyz \\ (x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)(z^4+z^2x^2+x^4)=x^3y^3z^3\end{cases}.$$

Решение: Заметим, что $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$. Отсюда, учитывая положительность x,y,z, получаем

$$(x^2-xy+y^2)(y^2-yz+z^2)(z^2-zx+x^2)=x^2y^2z^2.$$

Но для положительных x, y, z справедливо $x^2 - xy + y^2 \geqslant xy,\ y^2 - yz + z^2 \geqslant yz,\ z^2 - zx + x^2 \geqslant zx$ и равенства достигаются лишь при $x = y = z$. Подставляя $x = y = z$ в первое уравнение из условия, получаем $x = y = z = 1/3$.

Ответ: $x = y = z = 1/3$

7. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 3. Найдите объём призмы, если известно, что существует сфера радиуса 1, касающаяся плоскости нижнего основания, двух противоположных боковых рёбер и всех рёбер верхнего основания.

Решение: Обозначим вершины оснований призмы через A, B, C, D и A', B', C', D' и предположим, что AA', CC' — те самые боковые рёбра, которых касается сфера. Опустим из центра O сферы перпендикуляры: OK на плоскость $ABCD$, OL на ребро AA', OM на ребро $A'B'$. Длины этих перпендикуляров равны 1. Опустим также перпендикуляры ON и KP на плоскость $ABB'A'$. Тогда $NP = OK = 1$. Кроме того, треугольники OMN, OLN и KAP равны по гипотенузе и катету. Пусть x — длина этого катета, то есть $x = KP = ON$. Пусть $\alpha = \angle AKP$. Тогда $\alpha = \angle LON = \angle MON$. Из треугольника AKP

$$\cos\alpha = x/AK = x.$$

Но $\angle AKP = \angle ABK$, то есть из треугольника ABK

$$\sin\alpha = AK/AB = 1/3.$$

Итак, высота ромба в основании равна

$$2x = 2\cos\alpha = 4\sqrt{2}/3,$$

а высота призмы равна

$$PM = PN + NM = 1 + \sin\alpha = 4/3.$$

Стало быть, объём призмы равен

$$3 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 244

ОТВЕТЫ

1. 2024

2. 9

3. $1/3 < x \leqslant 2/3$

4. $x = k\pi,\ \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. 1

6. 1

7. 1 : 1

РЕШЕНИЯ

1. Дана функция $f(x) = \dfrac{(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2 - x^2}$. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее числа $f(2024)$.

Решение: Заметим, что $\dfrac{(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2 - x^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{2x + 1} = x + \dfrac{x+1}{2x+1}$. Стало быть, $f(2024) = 2024 + \dfrac{2025}{4049} \in (2024, 2025)$.

Ответ: 2024

2. Вычислите сумму $\dfrac{11}{1+2} + \dfrac{11}{1+2+3} + \dfrac{11}{1+2+3+4} + \ldots + \dfrac{11}{1+2+\ldots+10}$.

Решение: $\dfrac{11}{1+2} + \dfrac{11}{1+2+3} + \dfrac{11}{1+2+3+4} + \ldots + \dfrac{11}{1+2+\ldots+10} =$
$= \dfrac{11\cdot 2}{2\cdot 3} + \dfrac{11\cdot 2}{3\cdot 4} + \dfrac{11\cdot 2}{4\cdot 5} + \ldots + \dfrac{11\cdot 2}{10\cdot 11} = 22\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{11}\Big) = 22\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{11}\Big) =$
$= 22 \cdot \dfrac{9}{2\cdot 11} = 9$.

Ответ: 9

3. Решите неравенство $\log_9\left(x+\frac{1}{3}\right)-\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)\geqslant 1$.

Решение:

$$\log_9\left(x+\tfrac{1}{3}\right)-\log_3\left(x-\tfrac{1}{3}\right)\geqslant 1 \iff \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ \log_3\left(x+\frac{1}{3}\right)\geqslant \log_3\left(9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x+\frac{1}{3}\geqslant 9x^2-6x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ 9x^2-7x+\frac{2}{3}\leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9}\leqslant x\leqslant \frac{2}{3} \end{cases} \iff \tfrac{1}{3}<x\leqslant\tfrac{2}{3}$$

Ответ: $1/3<x\leqslant 2/3$

4. Решите уравнение $\cos 2x+\dfrac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x}{2}=1$.

Решение: Воспользуемся равенствами $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ и $1-\cos 2x=\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Тогда

$$\cos 2x+\frac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x}{2}=1 \iff \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x=0 \\ \operatorname{tg}x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. .$$

Ответ: $x=k\pi,\ \pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

5. В окружность Ω вписан четырёхугольник $ABCD$. На стороне BC отмечена точка E таким образом, что $CD=CE=1$ и $\angle AED=30^\circ$. Найдите радиус окружности Ω, если известно, что $\angle ACD=25^\circ$ и $\angle ACB=75^\circ$.

Решение: Из равнобедренности треугольника ECD следует, что $\angle DEC=\frac{1}{2}(180^\circ-25^\circ-75^\circ)=40^\circ$. Следовательно, $\angle AEC=30^\circ+40^\circ=70^\circ$.

Отметим на AE точку F таким образом, чтобы $CF=CE$. Тогда $\angle FCE=180^\circ-2\cdot70^\circ=40^\circ$ и, стало быть, $\angle FCD=100^\circ-40^\circ=60^\circ$. Отсюда следует, что треугольник DFC является правильным, то есть $DF=FC=1$.

Покажем, что $AF=FC$. Из треугольника AEC имеем $\angle CAE=180^\circ-70^\circ-75^\circ=35^\circ$. С другой стороны, $\angle ACF=\angle ACE-\angle FCE=75^\circ-40^\circ=35^\circ$. Таким образом, $\angle CAF=\angle ACF=35^\circ$, откуда следует, что, действительно, $AF=FC$.

Итак, точка F равноудалена от точек A, D, C, то есть является центром описанной около треугольника ADC окружности. Но эта окружность совпадает с окружностью Ω. Стало быть, искомый радиус равен 1.

Ответ: 1

6. Многочлен $f(x)$ второй степени имеет действительные коэффициенты. Попарно различные действительные числа a, b, c удовлетворяют условиям $f(a)=bc,\ \ f(b)=ca,\ \ f(c)=ab$. Найдите все возможные значения выражения

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{f(a+b+c)},$$

при условии, что $f(a+b+c)\neq 0$.

Решение: Пусть $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Тогда

$$\begin{cases} Aa^2 + Ba + C = bc \\ Ab^2 + Bb + C = ca \\ Ac^2 + Bc + C = ab \end{cases}.$$

Складывая эти равенства, получаем $A(a+b+c)^2 - 2A(ab+bc+ca) + B(a+b+c) + 3C = ab+bc+ca$. Отсюда следует, что

$$f(a+b+c) = (2A+1)(ab+bc+ca) - 2C.$$

Выразим A и C через a, b, c. Из системы следует, что

$$A(a^2b - ab^2) + C(b-a) = b^2c - ca^2 \qquad \text{и} \qquad A(a^2c - ac^2) + C(c-a) = bc^2 - a^2b.$$

Сокращая на (ненулевые) $a - b$ и $a - c$, получаем соответственно

$$Aab - C = -bc - ca \qquad \text{и} \qquad Aac - C = -bc - ab.$$

Вычитая из одного другое, получаем $A(ab - ac) = ab - ac$. Поскольку же $a \neq c$, приходим к соотношениям

$$A = 1, \qquad C = ab + bc + ca.$$

Итак, $f(a+b+c) = (2A+1)(ab+bc+ca) - 2C = ab + bc + ca = f(a) + f(b) + f(c)$. Стало быть, искомое соотношение равно 1.

Ответ: 1

7. Дан куб со стороной 1, основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC' и DD'. На рёбрах $A'B'$, $B'B$, BC, CD, DD', $D'A'$ отмечены точки K, L, M, N, O, P соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость KMO делит объём куба, если известно, что $\angle A'AK = \angle LAK$, $\angle BAM = \angle NAM$, $\angle DAO = \angle PAO$ и что $A'K + LB = BM + ND = DO + PA' = 5/4$.

Решение: Рассмотрим плоскость грани $AA'B'B$. Проведём в этой плоскости прямую через A, перпендикулярную AL. Обозначим через L' точку пересечения этой прямой с прямой $A'B'$. Тогда прямоугольные треугольники ABL и $AA'L'$ равны, откуда следует, что $BL = A'L'$, то есть

$$KL' = KA' + A'L' = KA' + BL = 5/4.$$

Кроме того,

$$\angle L'AK = \angle L'AA' + \angle A'AK = \angle BAL + \angle LAK = \angle BAK = \angle L'KA,$$

то есть треугольник $AL'K$ равнобедренный и $AL' = KL' = 5/4$. Но $AL' = AL$ из того же равенства треугольников ABL и $AA'L'$, то есть

$$AL = 5/4.$$

Но тогда $BL = \sqrt{(5/4)^2 - 1} = 3/4$ и, стало быть, $A'K = 5/4 - BL = 1/2$.

Аналогично, рассматривая грани $ABCD$ и $ADD'A'$, получаем, что $BM = 1/2$ и $DO = 1/2$.

Таким образом, точки K, M, O суть середины рёбер $A'B'$, BC, DD' соответственно. Существует ровно одна плоскость, проходящая через эти точки — это плоскость, перпендикулярная диагонали AC' куба и делящая эту диагональ пополам. Поскольку середина диагонали AC' является центром симметрии куба, плоскость делит куб на две равные части.

Ответ: 1 : 1

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 245

ОТВЕТЫ

1. 3

2. 1

3. $x \in (0,1) \cup (1,2]$

4. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. 45°

6. $1/3$

7. $23 : 13$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее число $\left(\frac{16}{25}\right)^{\cos(\pi/3)} + \left(\frac{9}{25}\right)^{-\sin(\pi/6)}$.

Решение: $\left(\frac{16}{25}\right)^{\cos(\pi/3)} + \left(\frac{9}{25}\right)^{-\sin(\pi/6)} = \frac{4}{5} + \frac{5}{3} = \frac{37}{15} \in (2,3)$.

Ответ: 3

2. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите её разность, если известно, что $a_1^2 + a_3^2 + \ldots + a_{19}^2 = 1330$, $a_2^2 + a_4^2 + \ldots + a_{20}^2 = 1540$ и $a_{10} + a_{11} = 21$.

Решение: Обозначим через d искомую разность. Для разности квадратов двух соседних членов прогрессии справедливо $a_{2k}^2 - a_{2k-1}^2 = (a_{2k} + a_{2k-1})d = (2a_1 + ((2k-1) + (2k-2))d)d$. Стало быть, $210 = 1540 - 1330 = (a_2^2 - a_1^2) + (a_4^2 - a_3^2) + \ldots + (a_{20}^2 - a_{19}^2) = (20a_1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 19)d)d = 10d(2a_1 + 19d) = 10d(a_{10} + a_{11}) = 210d$. Следовательно, $d = 1$.

Ответ: 1

3. Решите неравенство $\log_x \frac{2x}{3-x} \leqslant 2$.

Решение:

$$\log_x \frac{2x}{3-x} \leqslant 2 \iff \begin{cases} 0 < x < 3 \\ \dfrac{\frac{2x}{3-x} - x^2}{x-1} \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 3 \\ \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{(x-1)(x-3)} \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 0 < x < 3 \\ \dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 3,\ x \neq 1 \\ \dfrac{x(x-2)}{x-3} \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in (0,1) \cup (1,2].$$

Ответ: $x \in (0,1) \cup (1,2]$

4. Решите уравнение $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$.

Решение:

$$\cos 2x = \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x) \iff \cos^2 x - \sin^2 x = \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x) \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \cos(x - \pi/4) = 0 \\ \cos(x + \pi/4) = \cos(\pi/3 - \pi/4) \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 3\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi/4 \pm \pi/12 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. Окружность Ω_1 с центром O_1 и окружность Ω_2 с центром O_2 пересекаются в точках A и B, причём $\angle O_1AO_2 = 120^\circ$. Окружность, описанная около треугольника O_1AO_2 пересекает окружности Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках C и D (отличных от точки A). Найдите угол $\angle BDC$, если известно, что $\angle ACB = 15^\circ$.

Решение: Покажем, что точки C, B, O_2 лежат на одной прямой. Для этого покажем, что $\angle CBA + \angle ABO_2 = 180^\circ$. Заметим, что $\angle CBA = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle CO_1A) = \frac{1}{2}(360^\circ - (180^\circ - 2\angle O_1CA)) = 90^\circ + \angle O_1CA$. С другой стороны, $\angle ABO_2 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AO_2B) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle AO_2O_1) = 90^\circ - \angle AO_2O_1$. Заметим также, что углы $\angle O_1CA$ и $\angle AO_2O_1$ равны как опирающиеся на одну дугу. Стало быть, действительно,

$$\angle CBA + \angle ABO_2 = 90^\circ + \angle O_1CA + 90^\circ - \angle AO_2O_1 = 180^\circ.$$

Аналогично, точки D, B, O_1 лежат на одной прямой. Отсюда видим, что $\angle CBD = \angle O_1BO_2 = \angle O_1AO_2 = 120^\circ$. Далее, $\angle BCD = \angle ACB = 15^\circ$, ибо дуги AO_2 и O_2D равны. Стало быть, из треугольника CBD получаем, что $\angle BDC = 180^\circ - 120^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.

Ответ: 45°

6. Числа a, b, c, d положительны и удовлетворяют соотношению $a + b + c + d = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d}.$$

Решение: Заметим, что $\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d} = -(a+1) - (b+1) - (c+1) - (d+1) + \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = -5 + \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d}$.

Далее, заметим, что для любых положительных A, B справедливо $\frac{1}{A}+\frac{1}{B} \geqslant \frac{4}{A+B}$, ибо это неравенство равносильно неравенству $(A-B)^2 \geqslant 0$. Отсюда получаем, что для любых положительных A, B, C, D справедливо $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D} \geqslant \frac{4}{A+B}+\frac{4}{C+D} \geqslant \frac{16}{A+B+C+D}$.

Стало быть, исследуемое выражение оценивается снизу как $-5+\frac{16}{(1-a)+(1-b)+(1-c)+(1-d)} = -5+\frac{16}{3}=\frac{1}{3}$. Причём равенство достигается при $a=b=c=d=1/4$.

Ответ: $1/3$

7. Все рёбра прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равны. Найдите отношение, в котором делит объём этой призмы плоскость, проходящая через вершину C' и через середины рёбер AB, AA'.

Решение: Пусть рёбра призмы равны 1.

Пусть K — середина AB, L — середина AA'. Обозначим через N точку пересечения прямой LK с прямой BB'. Поскольку $AK=KB$, имеем $BN=LA=\frac{1}{2}AA'=\frac{1}{2}BB'$. Обозначим через M точку пересечения NC' с BC. Тогда из подобия треугольников NBM и $NB'C'$ получаем $BM=\frac{1}{3}B'C'=\frac{1}{3}BC$.

Найдём объём части, содержащей $A'B'C'$. Эта часть состоит из тетраэдра $KBMC'$ и пятиугольной пирамиды $KBB'A'LC'$.

Тетраэдр $KBMC'$ имеет объём

$$\frac{1}{3}\cdot CC'\cdot\frac{KB}{AB}\cdot\frac{BM}{BC}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{18}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{72}\,.$$

Пирамида $KBB'A'LC'$ имеет объём

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)AB\cdot AA'=\frac{7\sqrt{3}}{48}\,.$$

В сумме получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{72}+\frac{7\sqrt{3}}{48}=\frac{23\sqrt{3}}{144}\,.$$

Объём всей призмы равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$, поэтому объём оставшейся части равен

$$\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{23\sqrt{3}}{144}=\frac{36\sqrt{3}-23\sqrt{3}}{144}=\frac{13\sqrt{3}}{144}\,.$$

Стало быть, искомое отношение равно $23:13$.

Ответ: $23:13$

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 246

ОТВЕТЫ

1. 2

2. 8

3. $x \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup \{4\}$

4. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{9} + \frac{2k+1}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. $\sqrt{2}$

6. 16

7. $32\sqrt{6}$

РЕШЕНИЯ

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее число $\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right) - \log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Решение: $\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right) - \log_2\left(1+\sqrt{2}\right) = \log_2\left((1+\sqrt{2})^2\right) - \log_2\left(1+\sqrt{2}\right) = \log_2\left(1+\sqrt{2}\right) \in (1,2)$.

Ответ: 2

2. Найдите количество всех упорядоченных четвёрок чисел a, b, c, d, таких что числа a^2-ab+b^2, b^2-bc+c^2, c^2-cd-d^2 равны друг другу, если известно, что каждое из чисел a, b, c, d равно либо 1, либо 2, либо 3, а число a является среди них наибольшим.

Решение: Первое равенство равносильно равенству $(a-c)(a+c-b)=0$. Поскольку $a \geqslant b$ и $c \geqslant 1$, получаем $a=c$. Второе равенство равносильно равенству $(b-d)(b+d-c)=0$. Получаем либо $b=d$, либо $b+d=c(=a)$. Если $a=c=1$, то в силу максимальности a имеем $a=b=c=d=1$. Это один вариант. Если $a=c=2$, то либо $b=d=1$, либо $b=d=2$. Это ещё два варианта. Наконец, если $a=c=3$, то либо $b=d=1$, либо $b=d=2$, либо $b=d=3$, либо $b=1$, $d=2$, либо $b=2$, $d=1$. Это ещё пять вариантов. Всего получаем 8 вариантов.

Ответ: 8

3. Решите неравенство

$$\log_{x-1}(2x-5)+\log_{4x^2-20x+25}(x^2-2x+1)-\log_{2x-5}(4x^2-20x+25)\leqslant 0.$$

Решение: ОДЗ: $x>\frac{5}{2}$, $x\neq 3$. При x принадлежащем ОДЗ справедливо $x-1>1$ и, стало быть, при x из ОДЗ имеем

$$\log_{x-1}(2x-5)+\log_{4x^2-20x+25}(x^2-2x+1)-\log_{2x-5}(4x^2-20x+25)\leqslant 0 \iff$$
$$\iff \log_{x-1}(2x-5)+\log_{2x-5}(x-1)-2\leqslant 0 \iff \frac{(\log_{x-1}(2x-5)-1)^2}{\log_{x-1}(2x-5)}\leqslant 0 \iff$$
$$\iff \left[\begin{array}{l}\log_{x-1}(2x-5)=1\\ \log_{x-1}(2x-5)<0\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}2x-5=x-1\\ 2x-5<1\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=4\\ x<3\end{array}\right. .$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x\in\left(\frac{5}{2}\,,\,3\right)\cup\{4\}$.

Ответ: $x\in\left(\frac{5}{2}\,,\,3\right)\cup\{4\}$

4. Решите уравнение $\operatorname{tg}x-4\sin x=\sqrt{3}$.

Решение:

$$\operatorname{tg}x-4\sin x=\sqrt{3} \iff 4\sin x\cos x=\sin x-\sqrt{3}\cos x \iff \sin 2x=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \iff$$
$$\iff \left[\begin{array}{l}2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ 2x=-x+\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z} \quad \iff \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k+1}{3}\pi\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{\pi}{9}+\frac{2k+1}{3}\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

5. В треугольнике ABC угол A является тупым. На стороне BC отмечена точка D таким образом, что $AC=CD$. При этом окружность, описанная около треугольника ACD, касается прямой AB в точке A. На прямой AD отмечена точка E таким образом, что $CE=EA=AB$. Найдите отношение $BC:AB$.

Решение: Поскольку треугольник ACD равнобедренный, угол $\angle CAD$ является острым. Аналогично, из равнобедренности треугольника AEC следует, что угол $\angle CAE$ является острым. Стало быть, точки E и D лежат по одну сторону от прямой AC. Далее, у треугольников ACD и AEC общий угол при основаниях. Стало быть, $\angle AEC=\angle DCA$. Но $\angle DCA=\angle DAB$, так как угол DCA опирается на дугу AD, тогда как прямая AB является касательной. Получаем равенство $\angle AEC=\angle DAB=\angle EAB$, из которого следует, что $AB\parallel CE$. Учитывая, что $AB=CE$, видим, что $ABEC$ — параллелограмм. Тогда $BD=\frac{1}{2}BC$, откуда по теореме о секущей и касательной получаем, что $AB^2=\frac{1}{2}BC^2$. Стало быть, $BC:AB=\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$

6. Многочлен $f(x)=x^4-12x^3+ax^2+bx+81$ с действительными a и b допускает разложение

$$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)$$

с некоторыми действительными c_1,c_2,c_3,c_4. Найдите все возможные значения $f(5)$.

Решение: Раскрывая скобки, получаем равенства

$$c_1+c_2+c_3+c_4=12 \qquad \text{и} \qquad c_1c_2c_3c_4=81.$$

Стало быть, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$3 = \frac{1}{4}(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) = \frac{\frac{c_1+c_2}{2} + \frac{c_3+c_4}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{c_1c_2} + \sqrt{c_3c_4}}{2} \geqslant \sqrt[4]{c_1c_2c_3c_4} = 3.$$

То есть все неравенства должны быть равенствами, а это равносильно тому, что $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 3$. А это значит, что $f(x) = (x-3)^4$. Стало быть, $f(5) = 2^4 = 16$.

Ответ: 16

7. Расстояние от середины высоты правильной четырёхугольной пирамиды до боковой грани равно $\sqrt{2}$, а до бокового ребра — $\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды.

Решение: Пусть S — вершина пирамиды, H — основание высоты, A — одна из вершин основания, M — середина одного из ребер основания. Обозначим также через a длину ребра основания и через h высоту пирамиды. Из условия следует, что расстояние от середины отрезка SH до SM равно $\sqrt{2}$, а до SA — $\sqrt{3}$. Из подобия треугольников получаем

$$\frac{\sqrt{2}}{h/2} = \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + h^2}}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{h/2} = \frac{a/\sqrt{2}}{\sqrt{a^2/2 + h^2}}.$$

То есть

$$\begin{cases} \dfrac{a^2/4 + h^2}{a^2h^2} = \dfrac{1}{32} \\ \dfrac{a^2/2 + h^2}{a^2h^2} = \dfrac{1}{24} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{4h^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{32} \\ \dfrac{1}{2h^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{24} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{24} \\ \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{48} \end{cases} \iff \begin{cases} h = 2\sqrt{6} \\ a^2 = 48 \end{cases}.$$

Стало быть, искомый объём равен $\frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 2\sqrt{6} = 32\sqrt{6}$.

Ответ: $32\sqrt{6}$