Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 241

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее числа $\dfrac{2+\cos\frac{\pi}{5}}{3}+\dfrac{3+\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$.

2. Натуральные числа $a_1,\ldots,a_n$ образуют строго возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите все возможные значения n, если известно, что n нечётно, $n>1$ и сумма $a_1+\ldots+a_n$ равна 2024.

3. Решите неравенство $\log_{x+3}(x^2-7x+12)\leqslant 2$.

4. Решите уравнение
$$\frac{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}4x\operatorname{tg}2x.$$

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Известно, что $AD=2+\sqrt{3}$, $CD=\sqrt{3}$. Найдите угол $\angle CAB$, если известно также, что он в два раза меньше угла $\angle ACB$.

6. Числа a, b, c положительны и удовлетворяют соотношению $a+b+c=1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения
$$\frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c}.$$

7. Плоскость π перпендикулярна ребру SA правильной треугольной пирамиды $ABCS$ с вершиной S и основанием ABC, делит это ребро в отношении $1:2$ (считая от вершины S) и проходит через середину ребра SB. Найдите угол между плоскостью π и плоскостью основания пирамиды.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 242

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}+\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$.

2. Найдите сумму всех натуральных чисел n, для которых число n^2+7n+1 является квадратом некоторого натурального числа.

3. Решите неравенство $8^{\log_{x^2-1}(x-1)}+8^{\log_{x^2-1}(x+1)}\leqslant 6$.

4. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x+\cos x=1$.

5. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. На дуге CA (не содержащей точку B) этой окружности отмечена некоторая точка P. Прямая, проходящая через точки B и H, где H — точка пересечения высот треугольника ABC, пересекает отрезок AP в точке Q. Найдите отношение AC к BC, если известно, что точки C, P, Q, H лежат на одной окружности.

6. Число x_0 является общим корнем многочленов x^3+ax^2+bx+c, x^3+bx^2+cx+a, x^3+cx^2+ax+b. Найдите все возможные значения x_0, если известно, что $a>b>c$.

7. В основании пирамиды лежит трапеция $ABCD$, $AD\|BC$, $AD=2BC$. Сфера радиуса 1 касается плоскости основания пирамиды и плоскостей её боковых граней ADS и BCS. Найдите отношение, в котором делит объём пирамиды плоскость ADT, где T — точка касания сферы с плоскостью BCS, если грань ADS перпендикулярна плоскости основания, а высота пирамиды равна 4.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 243

1. Найдите целое число, задаваемое выражением $\log_{1/2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)+\log_{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Найдите сумму всех двузначных чисел, состоящих из одной чётной цифры и одной нечётной цифры (чётные цифры — это $0, 2, 4, 6, 8$, нечётные — все остальные).

3. Решите неравенство
$$\frac{4^{x^2}-16^{4x-8}}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{12+4x-x^2}}>0.$$

4. Решите уравнение $2\sin^3 x=\cos 3x$.

5. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, отличная от B и C. Пусть E — точка пересечения отрезка AC с окружностью, описанной около треугольника ABD, отличная от A. Пусть F — точка пересечения отрезка AB с окружностью, описанной около треугольника ACD, отличная от A. Пусть D', E', F' — точки пересечения окружности, описанной около треугольника ABC, с прямыми AD, BE, CF соответственно, отличные от точек A, B, C. Найдите угол $\angle E'D'F'$, если известно, что $\angle EDF=30^\circ$.

6. Найдите все тройки положительных чисел x, y, z, удовлетворяющие системе уравнений
$$\begin{cases}(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)=xyz\\(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)(z^4+z^2x^2+x^4)=x^3y^3z^3\end{cases}.$$

7. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 3. Найдите объём призмы, если известно, что существует сфера радиуса 1, касающаяся плоскости нижнего основания, двух противоположных боковых рёбер и всех рёбер верхнего основания.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 244

1. Дана функция $f(x) = \dfrac{(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2 - x^2}$. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее числа $f(2024)$.

2. Вычислите сумму $\dfrac{11}{1+2} + \dfrac{11}{1+2+3} + \dfrac{11}{1+2+3+4} + \ldots + \dfrac{11}{1+2+\ldots+10}$.

3. Решите неравенство $\log_9\left(x+\frac{1}{3}\right) - \log_3\left(x-\frac{1}{3}\right) \geqslant 1$.

4. Решите уравнение $\cos 2x + \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x}{2} = 1$.

5. В окружность Ω вписан четырёхугольник $ABCD$. На стороне BC отмечена точка E таким образом, что $CD = CE = 1$ и $\angle AED = 30^\circ$. Найдите радиус окружности Ω, если известно, что $\angle ACD = 25^\circ$ и $\angle ACB = 75^\circ$.

6. Многочлен $f(x)$ второй степени имеет действительные коэффициенты. Попарно различные действительные числа a, b, c удовлетворяют условиям $f(a) = bc$, $f(b) = ca$, $f(c) = ab$. Найдите все возможные значения выражения

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{f(a+b+c)},$$

при условии, что $f(a+b+c) \neq 0$.

7. Дан куб со стороной 1, основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC' и DD'. На рёбрах $A'B'$, $B'B$, BC, CD, DD', $D'A'$ отмечены точки K, L, M, N, O, P соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость KMO делит объём куба, если известно, что $\angle A'AK = \angle LAK$, $\angle BAM = \angle NAM$, $\angle DAO = \angle PAO$ и что $A'K + LB = BM + ND = DO + PA' = 5/4$.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 245

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее число $\left(\frac{16}{25}\right)^{\cos(\pi/3)} + \left(\frac{9}{25}\right)^{-\sin(\pi/6)}$.

2. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите её разность, если известно, что $a_1^2 + a_3^2 + \ldots + a_{19}^2 = 1330$, $a_2^2 + a_4^2 + \ldots + a_{20}^2 = 1540$ и $a_{10} + a_{11} = 21$.

3. Решите неравенство $\log_x \frac{2x}{3-x} \leqslant 2$.

4. Решите уравнение $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$.

5. Окружность Ω_1 с центром O_1 и окружность Ω_2 с центром O_2 пересекаются в точках A и B, причём $\angle O_1AO_2 = 120°$. Окружность, описанная около треугольника O_1AO_2 пересекает окружности Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках C и D (отличных от точки A). Найдите угол $\angle BDC$, если известно, что $\angle ACB = 15°$.

6. Числа a, b, c, d положительны и удовлетворяют соотношению $a + b + c + d = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d}\,.$$

7. Все рёбра прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA', BB', CC' равны. Найдите отношение, в котором делит объём этой призмы плоскость, проходящая через вершину C' и через середины рёбер AB, AA'.

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2024 года

ВАРИАНТ 246

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее число $\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)-\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

2. Найдите количество всех упорядоченных четвёрок чисел a, b, c, d, таких что числа a^2-ab+b^2, b^2-bc+c^2, c^2-cd-d^2 равны друг другу, если известно, что каждое из чисел a, b, c, d равно либо 1, либо 2, либо 3, а число a является среди них наибольшим.

3. Решите неравенство

$$\log_{x-1}(2x-5)+\log_{4x^2-20x+25}(x^2-2x+1)-\log_{2x-5}(4x^2-20x+25)\leqslant 0.$$

4. Решите уравнение $\operatorname{tg} x-4\sin x=\sqrt{3}$.

5. В треугольнике ABC угол A является тупым. На стороне BC отмечена точка D таким образом, что $AC=CD$. При этом окружность, описанная около треугольника ACD, касается прямой AB в точке A. На прямой AD отмечена точка E таким образом, что $CE=EA=AB$. Найдите отношение $BC:AB$.

6. Многочлен $f(x)=x^4-12x^3+ax^2+bx+81$ с действительными a и b допускает разложение

$$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)$$

с некоторыми действительными c_1, c_2, c_3, c_4. Найдите все возможные значения $f(5)$.

7. Расстояние от середины высоты правильной четырёхугольной пирамиды до боковой грани равно $\sqrt{2}$, а до бокового ребра — $\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды.